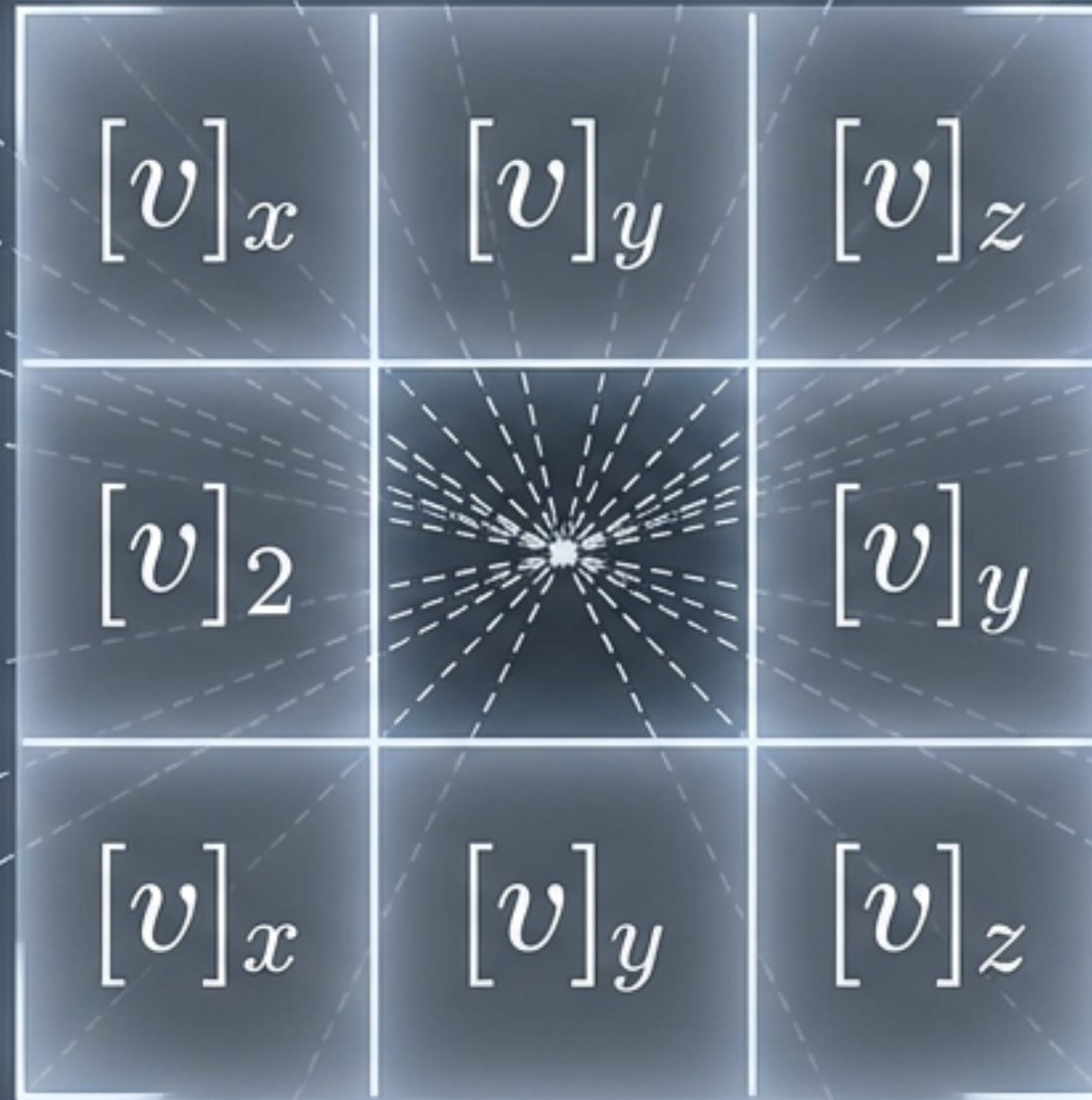




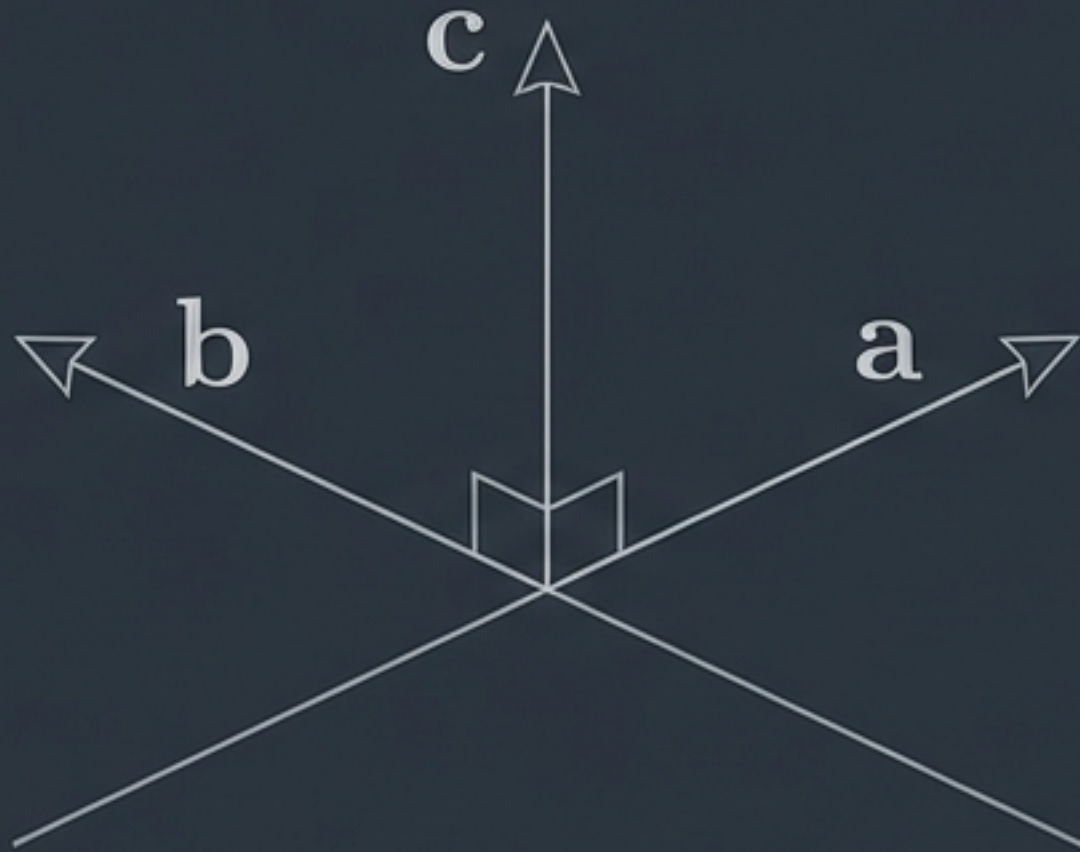
$[v]_x$	$[v]_y$	$[v]_z$
$[v]_2$		$[v]_y$
$[v]_x$	$[v]_y$	$[v]_z$

Bilgisayarlı Görüde 3x3 Ters-Simetrik Matrisler

Cebirsel temellerden N-bakışlı geometriye

Çapraz Çarpımın Lineer Bir Operatör Olarak Yeniden Tanımlanması

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c}$$



$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = [\mathbf{a}]_{\times} \mathbf{b}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & -a_z & a_y \\ a_z & \mathbf{0} & -a_x \\ -a_y & a_x & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \mathbf{S}^T = -\mathbf{S}$$

Çapraz çarpımı bir vektör işleminden çıkarıp, zarif bir matris çarpımına dönüştürmek, çoklu-bakış geometrisinin temelini oluşturur.

$$\mathbf{S} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T$$



İki eşit, sıfırdan farklı
tekil değer (İzotropi).

İki eşit, sıfırdan farklı
tekil değer (İzotropi).

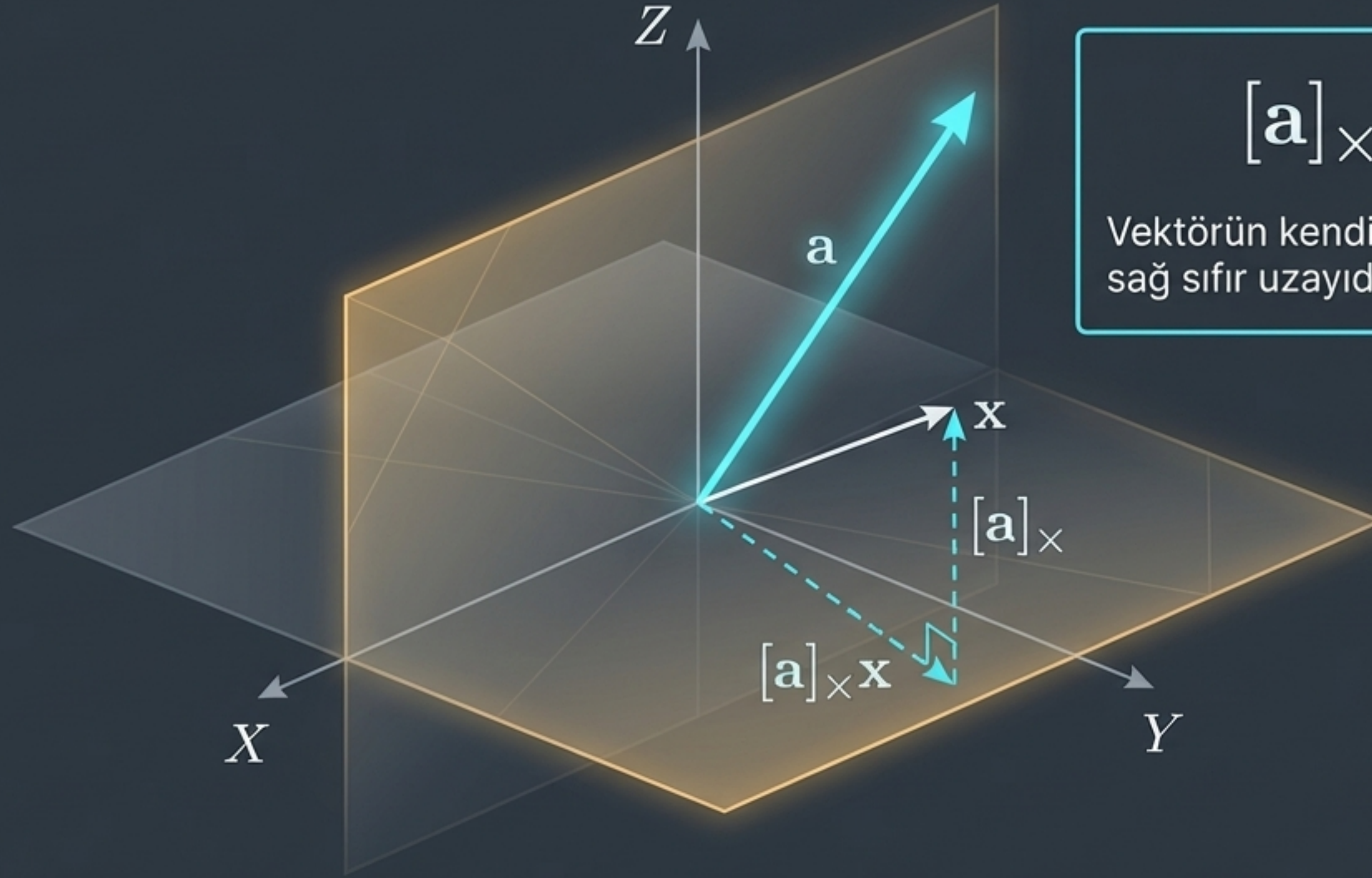
$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} a & & & \\ & \text{diag}(a, a, 0) & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

Bir adet sıfır
tekil değer.

Kesinlikle Rank-2 bir matris.

Bu cebirsel yapı, matrisin her zaman 3B uzayı
2B bir düzleme sıkıştırdığını garanti eder.

Geometrik Yorum: Sıfır Uzayının Doğası



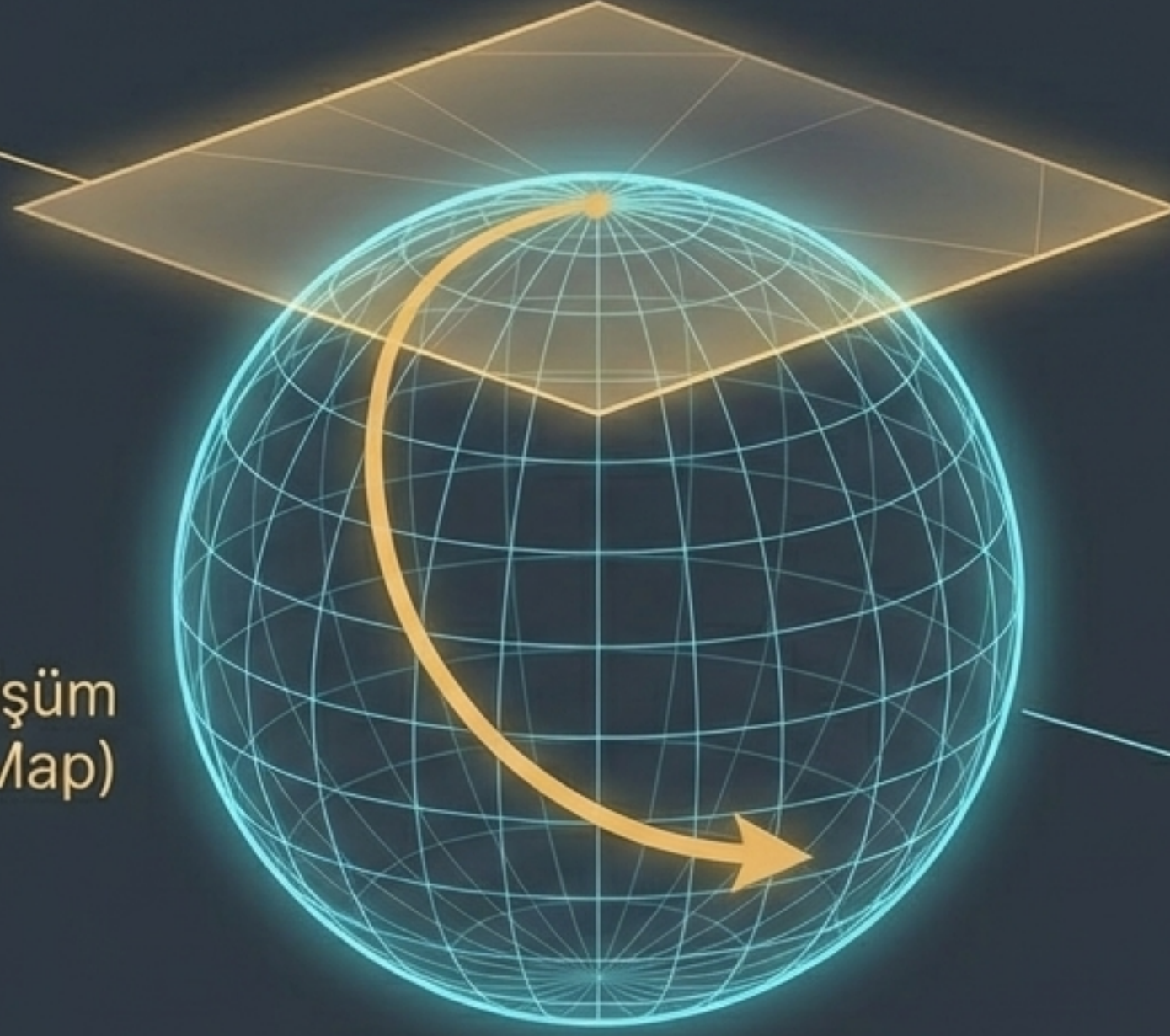
Operatör, uzayı kendi null-vektörü boyunca ezer.
Sıfır uzayı, geometrik kısıtlamaların doğduğu yerdir.

Kinematik: 3B Dönüşümlerin Üreteci (Generator)

Lie Group/Algebra Map

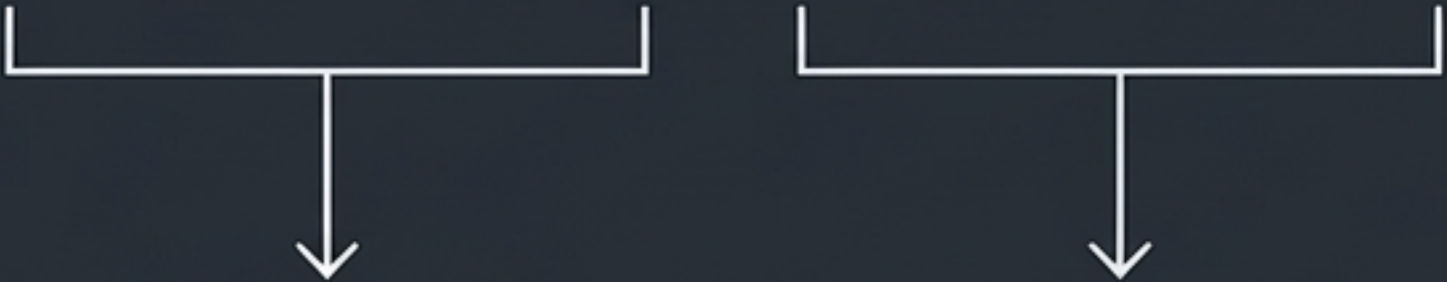
$\mathfrak{so}(3)$
Ters-simetrik
matrislerin uzayı (Türevin
ve teğetin dünyası).

Üstel Dönüşüm
(Exponential Map)



$SO(3)$
Ortogonal rotasyon
matrislerinin uzayı
(Fiziksel dönüşümün
dünyası).

Üstel Dönüşüm ve Rodrigues Formülü

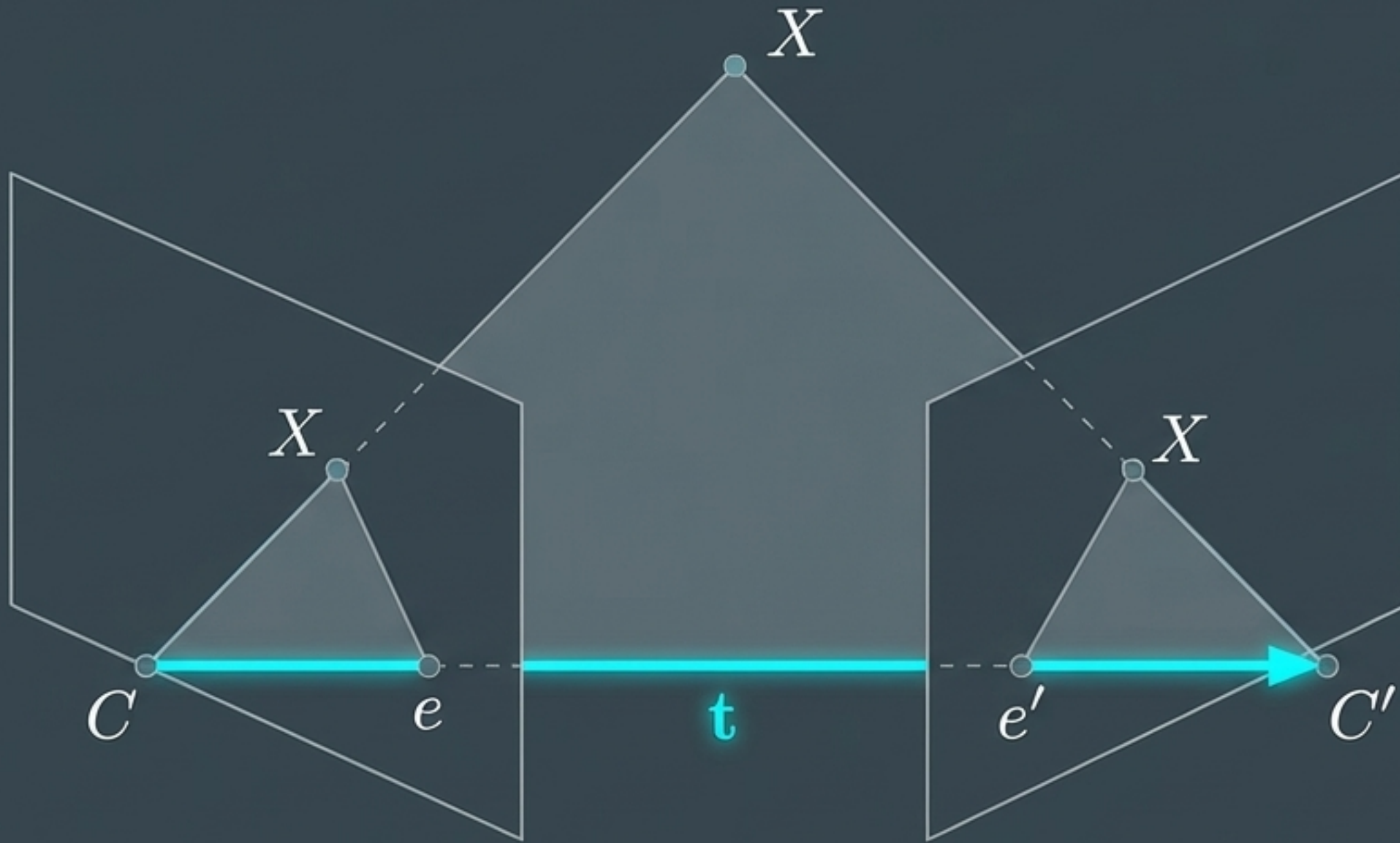
$$\mathbf{R} = e^{[t]_{\times}} = \mathbf{I} + [t]_{\times} + \frac{[t]_{\times}^2}{2!} + \frac{[t]_{\times}^3}{3!} + \frac{[t]_{\times}^4}{4!} + \dots$$


$\sin(\theta)$ $\cos(\theta)$

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \sin(\theta)[\mathbf{u}]_{\times} + (1 - \cos(\theta))[\mathbf{u}]_{\times}^2$$

Sürekli (continuous) zamanlı dönüşümlerin, ayrık (discrete) rotasyonlara kusursuz geçişi.

Epipolar Geometri: Boyut İndirgeyici (Dimension Collapser)



3B hacimsel alan, baz hattı (baseline) t etrafında ters-simetrik filtreleme ile 2B epipolar düzlemlere indirgenir.

Esas Matris (Essential Matrix): $E = [t]_{\text{mes}} R$

$$\mathbf{x}'^T \mathbf{E} \mathbf{x} = 0$$

$$\mathbf{x}'^T ([\mathbf{t}]_{\times} \mathbf{R}) \mathbf{x} = 0$$

Kamera 1'deki nokta

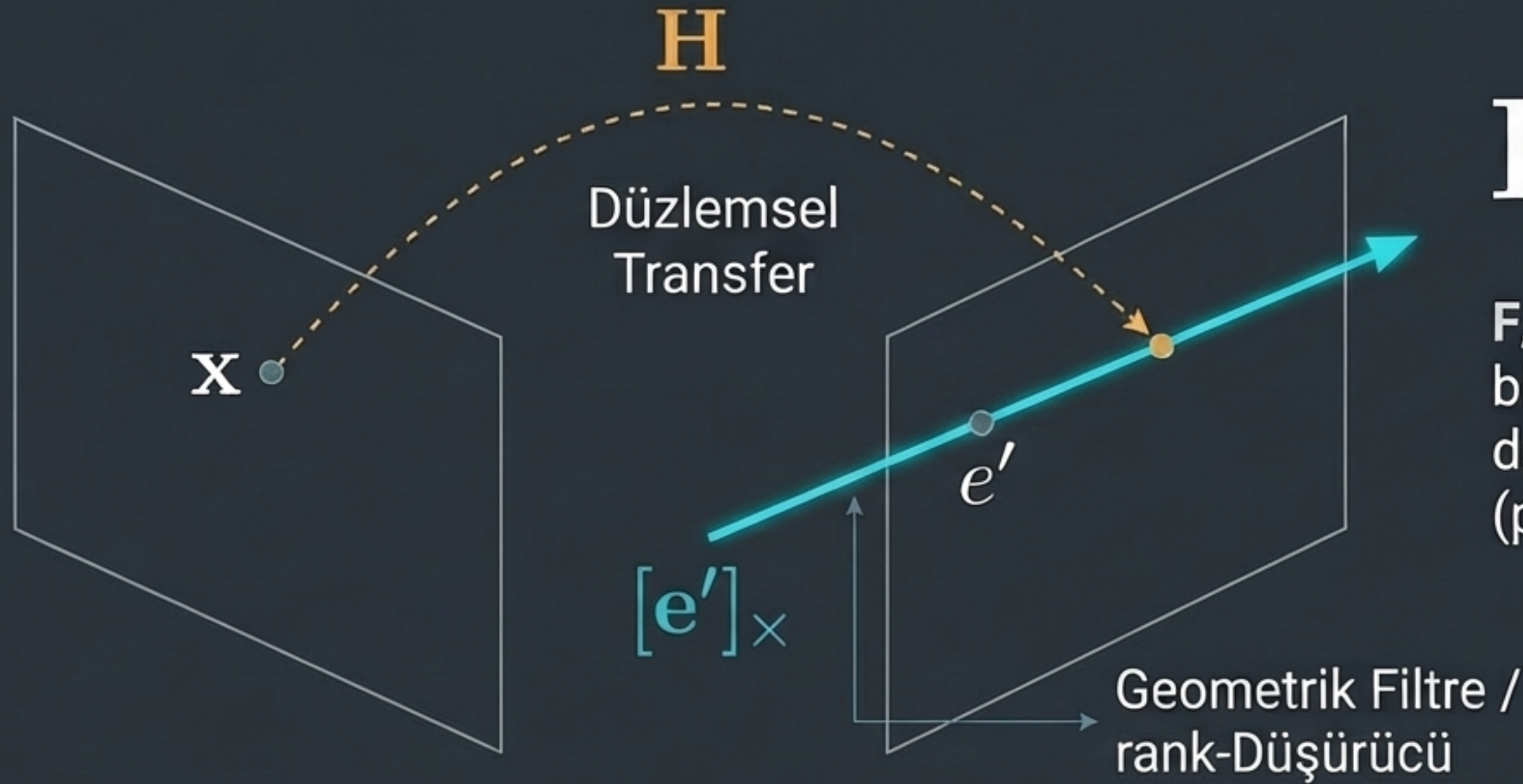
Düzlem üzerindeki nokta onayı

Dönme Transferi

Sıfır Uzayı İzdüşümü

Esas matris E , yalnızca kalibre edilmiş kameralar için geçerli olan metrik bir uzay filtresidir.

Temel Matris (Fundamental Matrix): $F = [e'] \times H$



$$\mathbf{F} = [\mathbf{e}']_{\times} \mathbf{H}$$

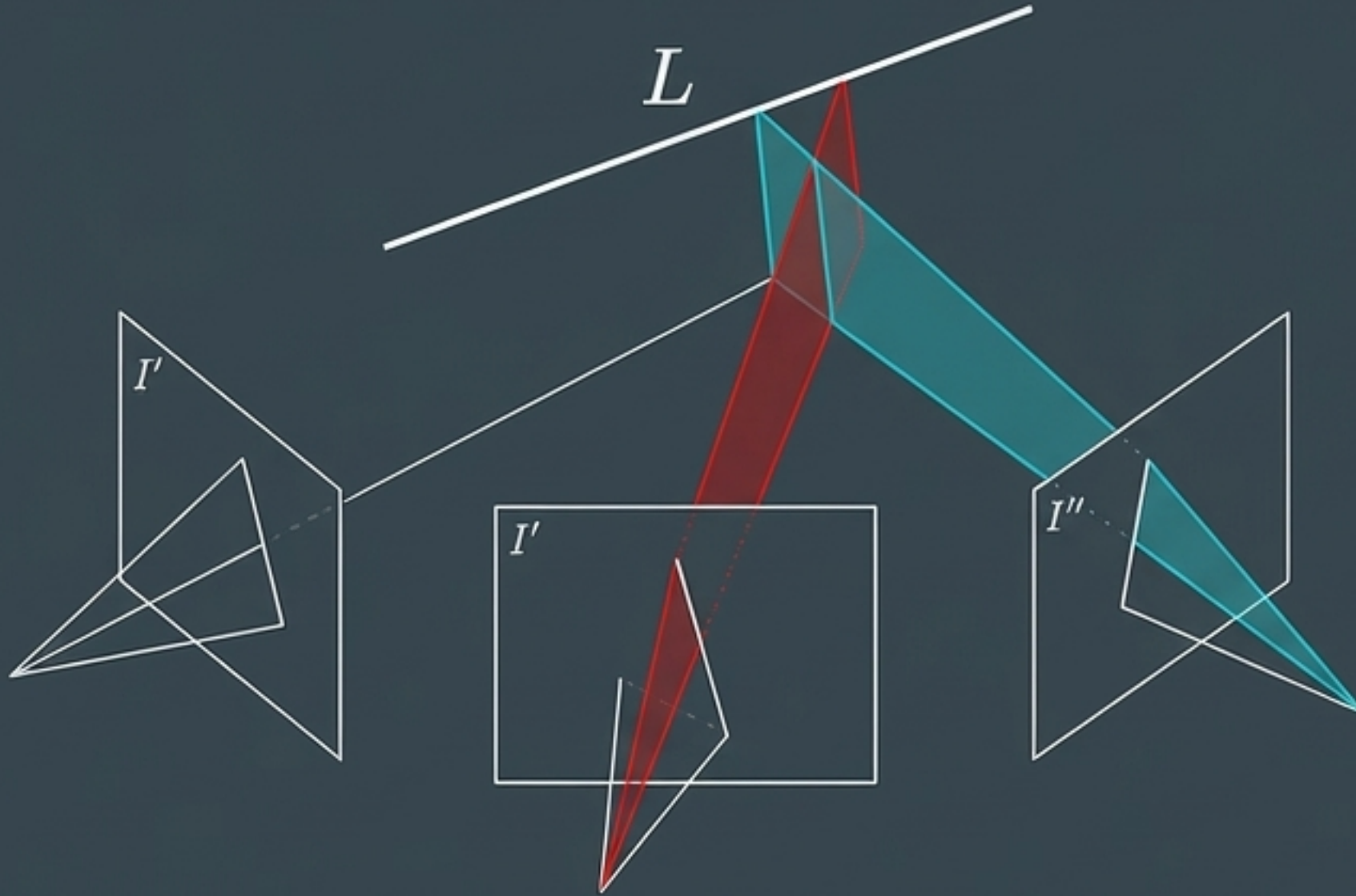
F , metrik bilginin yokluğunda bile epipolar kısıtı koruyan, daha genel bir izdüşümsel (projective) formdur.

Karşılaştırma Matrisi: Temel (F) ve Esas (E) Matrisler

	Temel Matris (F)	Esas Matris (E)
Denklem:	$F = [e']_{\times} H_{\infty}$	$E = [t]_{\times} R$
Ters-Simetrik Çekirdek:	Epipol $[e']_{\times}$ (İzdüşümsel)	Öteleme $[t]_{\times}$ (Metrik)
Dönüşüm Bileşeni:	Sonsuz Homografi (H_{∞})	Rotasyon (R)
Tekil Değerler:	$(\sigma_1, \sigma_2, 0)$	$(a, a, 0)$

— E'nin iki eşit tekil değeri, onun metrik bir uzayda dönme ve öteleme gerçekleştirdiğinin kesin cebirsel kanıtıdır.

İleri Düzey Kısıtlar: Trifokal Tensör

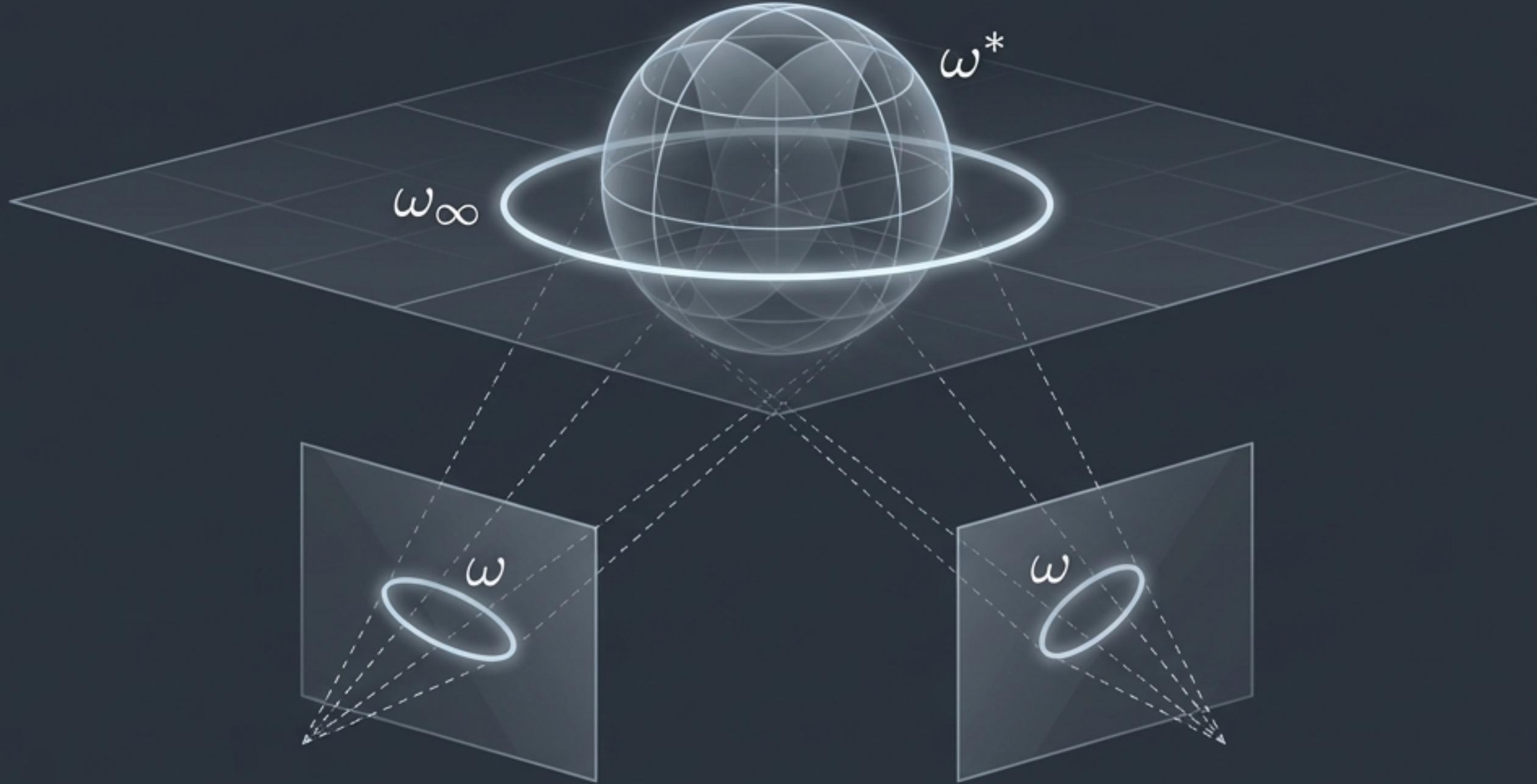


$$[l']_{\times} T [l'']_{\times} = 0$$

$[l']_{\times}$ ve $[l'']_{\times}$ operatörleri cebirsel rastlantı (incidence) kısıtlayıcıları olarak çalışır. Çapraz çarpım operatörü, geri-izdüşümlü düzlemlerin uzayda 3B bir çizgi etrafında kusursuzca buluşmasını garanti ederek 27 elemanlı T_i^{jk} tensörünü üretir.

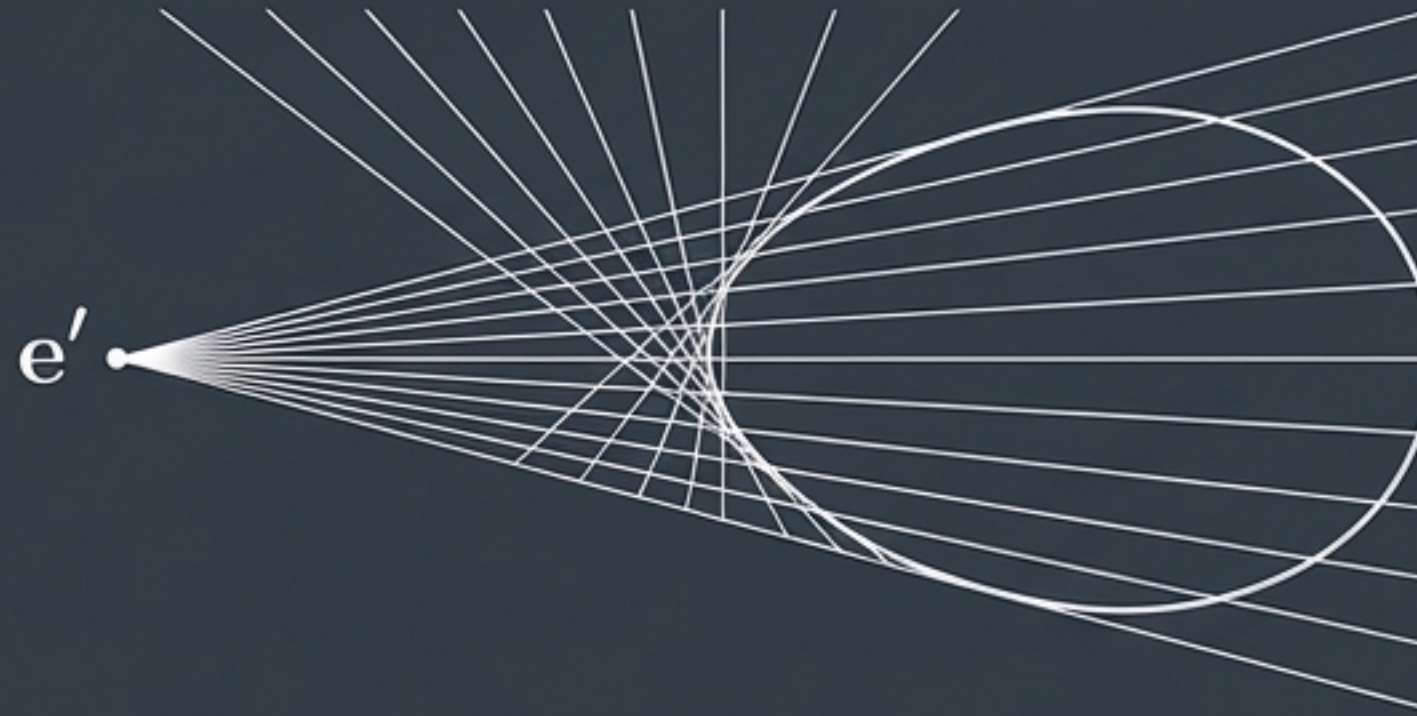
Ters-simetrik matrisler, tensör notasyonunda çizgi kesişimlerini ve rastlantı kısıtlarını doğal olarak ifade eder.

Otokalibrasyon ve Mutlak Dual Kuadrik (Absolute Dual Quadric)



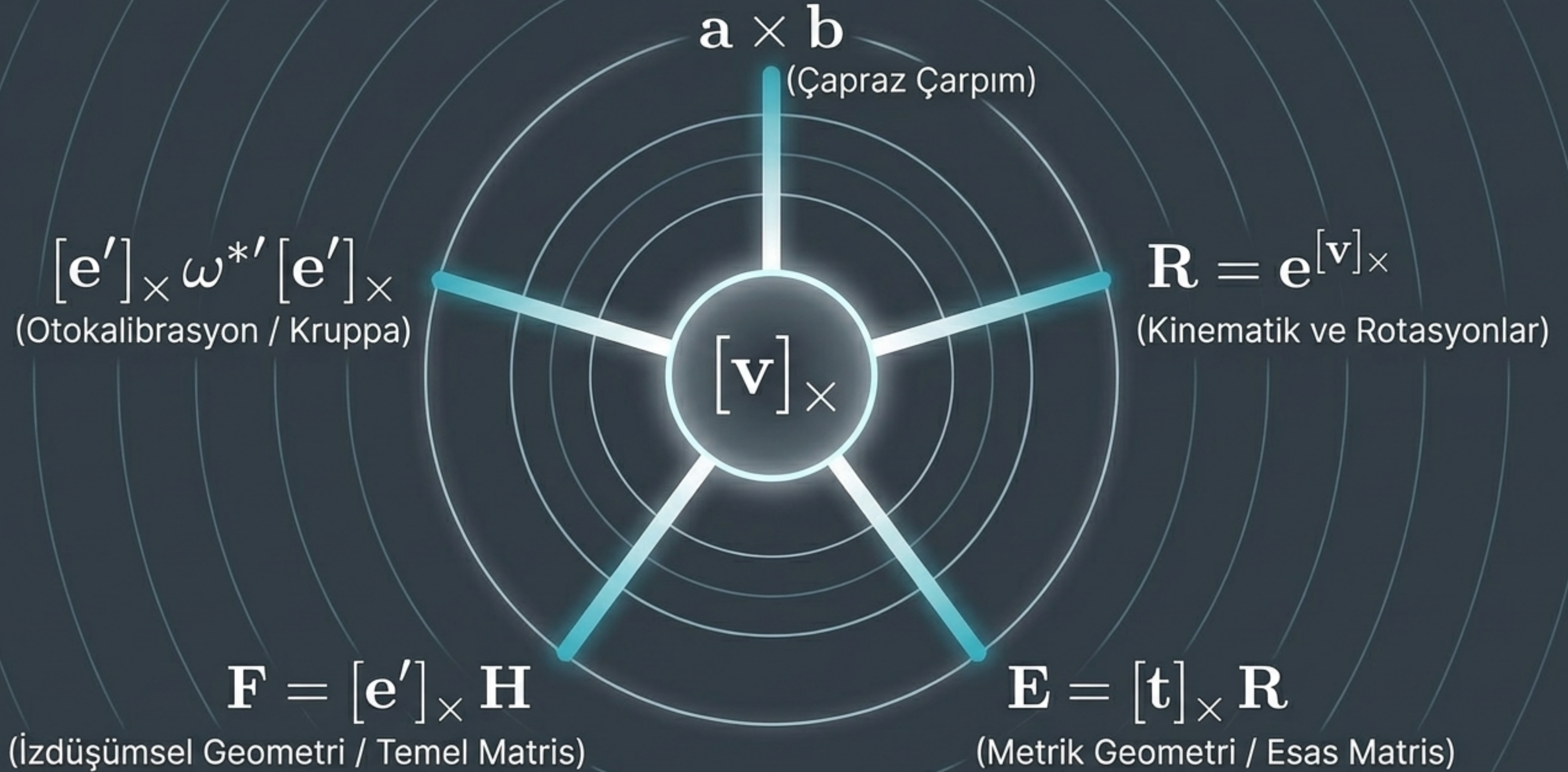
Mutlak Dual Kuadrik (ω^*), ötelenme ve dönmeden bağımsız olan kalibrasyon bilgisini taşır. Otokalibrasyon, bu yapının kameralardaki izdüşümünü bulma problemidir.

$$\underbrace{[\mathbf{e}']_{\times} \omega^{*'} [\mathbf{e}']_{\times}}_{\text{Kitap Tutucu}} = \underbrace{F \omega^* F^T}_{\text{Epipolar Düzlemler}}$$



$[\mathbf{e}']_{\times}$ matrisi, sonsuz dual kuadriği epipolar düzlemlere yansıtan geometrik bir 'kitap tutucu' işlevi görür. Bu sayede 3B ve yapıya ihtiyaç duymadan iç parametreler hesaplanır.

Evrensel Menteşe (The Universal Hinge): Büyük Sentez





$$\mathbf{S}^T = -\mathbf{S}$$

Basit bir vektör çarpımı kısayolundan, N-bakışlı tensör kısıtlarına uzanan bir yolculuk.

Ters-simetrik matris, bilgisayarlı görünün temel yapı taşı ve çoklu-bakış geometrisinin evrensel motorudur.

Geometri fizikseldir; ancak zarafet cebirseldir.